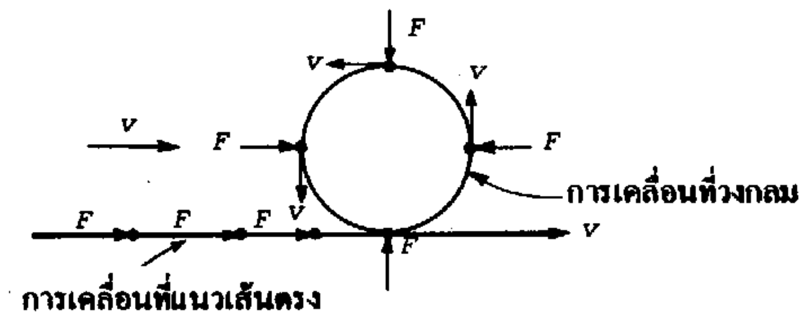
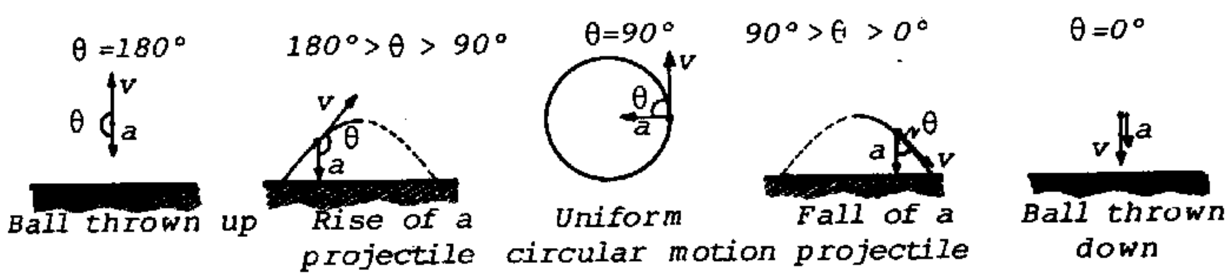
3. การเคลื่อนที่แบบวงกลม

3.1 ลักษณะการเคลื่อนที่เป็นวงกลม การเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นวงกลมคือ การเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีแรงกระทำตั้งฉากกับความเร็วอยู่ตลอดเวลา ดังรูป 14.8



รูปที่ 14.8 แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นเส้นตรงและวงกลม

สรุปลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุแบบต่างๆ ได้ดังนี้



รูปที่ 14.9 แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุแบบต่างๆ

1. ถ้าแรง F ขนานกับความเร็วจะได้การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง
2. ถ้าแรง F กับความเร็วทำมุม θ อยู่ระหว่าง 0 ถึง 180^0 จะได้การเคลื่อนที่เป็นวิถีโค้ง
3. ถ้าแรง F กับความเร็งตั้งฉากกันจะได้การเคลื่อนที่เป็นวงกลม

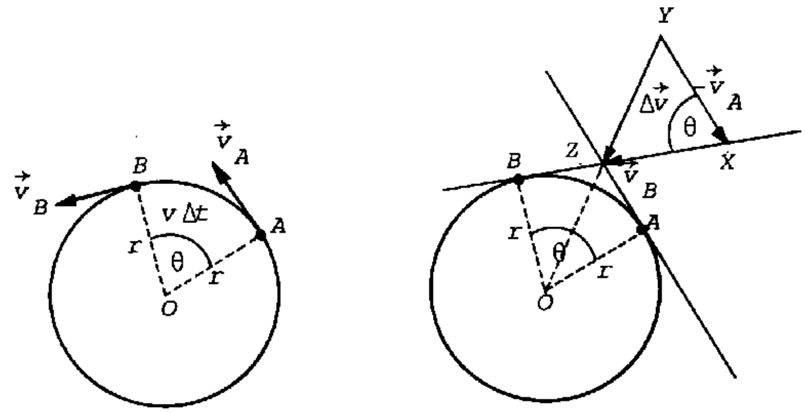
จากรูป ทิศของแรงก็คือทิศของความเร่ง

3.2 ความเร่งของการเคลื่อนที่เป็นวงกลม เนื่องจากการเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นวงกลม มีแรงลัพธ์ ในแนวตั้งฉากกับความเร็วอยู่ตลอดเวลา ดังนั้นความเร่งที่เกิดขึ้นจะต้องตั้งฉากกับความเร็วตลอดเวลาด้วยเราเรียกความเร่งนี้ว่า ความเร่งสู่ศูนย์กลาง

ถ้าวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมมีแรงมากระทำกว่าหนึ่งแนวจะทำให้เกิดความเร่งขึ้นสองแนวด้วยกัน คือ แนวสู่ศูนย์กลางและแนวเส้นสัมผัสซึ่งแยกการพิจารณาได้ดังนี้

3.2.1 วัตถุที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็งคงที่ ได้แก่การเคลื่อนที่ของวตถุเป็นวงกลมที่มีแรงลัพธ์ตั้งฉากกับความเร็ว ส่วนใหญ่ไได้แก่การเคลื่อนที่เป็นวงกลมในแนวราบจะเกิดความเร่งสู่ศูนย์กลางเพียงแนวเดียวเท่านั้น และในกรณีอัตราเร็วของวัตถุจะมีค่าคงที่

การหาความเร่งสู่ศูนย์กลาง (a_c) กำหนดให้วัตถุอันหนึ่งวิ่งเป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่ v จาก A ไป B ในช่วงเวลาสั้น



รูปที่ 14.10 ความเร่งของวัตถุวิ่งเป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่

จากนิยามความเร่ง $a = \frac{dv}{dt}$ หรือ $\lim_{\Delta t \to o} \frac{\vec{V}_B - \vec{V}_A}{\Delta t}$

$\therefore$ จากโจทย์จะได้ $a = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$

เขียนรูป vector ของความเร็วจะได้ดังรูป (B)

$\Delta XYZ \sim \Delta AoB;$ จะได้ $\frac{AB}{YZ} = \frac{AO}{XZ}$ $\therefore$ แทนค่า $\frac{V\Delta t}{\Delta V} = \frac{r}{v}$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

แต่ $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ = ความเร่งของการเคลื่อนที่เป็นวงกลม

ดังนั้นจะได้ $a = \frac{v^2}{r}$ และมีทิศสู่ศูนย์กลาง

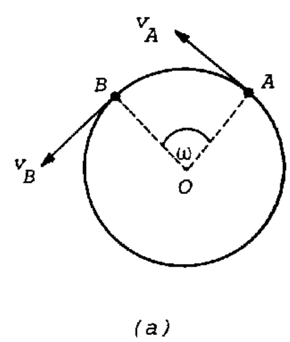
ถ้าให้ a_c = ความเร่งสู่ศูนย์กลาง ดังนั้นจะได้

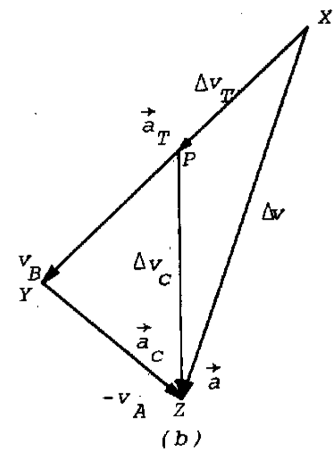
$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

นั่นคือ วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่จะเกิดความเร่งเพียงแนวเดียวเท่านั้นคือแนวสู่ศูนย์กลางคือ (a_c)

3.2.2 วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วไม่คงที่ ได้แก่ การเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นวงกลมที่มีแรงกระทำหลายแนว เช่น การเคลื่อนที่เป็นวงกลมในแนวดิ่งภายใต้แรงดึงดูด ของโลกจะเกิดความเร่งขึ้น 2 แนวคือ แนวสัมผัส (a_T) และแนวสู่ศูนย์กลาง (a_c) อัตราเร็วของการเคลื่อนที่ในกรณีนี้จะมีค่าไม่คงที่

การหาความเร่งของการเคลื่อนที่ กำหนดให้ วัตถุอันหนึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลม โดยมีอัตราเร็วที่ A เท่ากับ v_A และมีอัตราเร็วที่ B เท่ากับ v_b โดยใช้เวลาเคลื่อนที่จาก A ไป B นานเท่ากับ Δt ซึ่งเป็นเวลาสั้นๆ ต้องการหาความเร่งของการเคลื่อนที่





รูปที่ 14.11 ความเร่งของวัตถุวิ่งเป็นวงกลมด้วยความเร็วไม่คงที่

หาความเร่งจาก $a = \lim_{\Delta t \to o} \dfrac{\vec{v}_b - \vec{v}_A}{\Delta t}$

ถ้า $v_b > v_A$ เขียนรูป Vector จะได้ Vector ของเราเป็น ΔXYZ โดยมี XZ เป็นทิศของ Δv คือทิศของความเร่งที่เกิดขึ้น

ถ้าให้ $V_b > V_A$ จะได้ Δv_c คือด้าน PZ มีทิศสู้ศูนย์กลาง คือความเร่งสู้ศูนย์กลาง (a_c)

จาก Δ ของ Vector PXZ จะได้ PX เป็นทิศความเร่งแนวเส้นสัมผัส (a_t)

$\therefore$ จาก ΔPXZ จะได้ $\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$

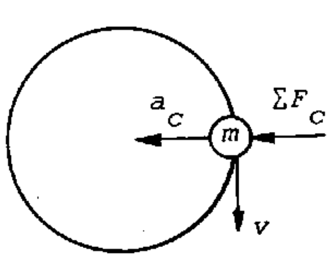
$\therefore$ วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมจะได้เส้นสัมผัสตั้งฉากกับรัศมี

$\therefore$ ขนาดความเร่ง $a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$

a_c ความเร่งสู่ศูนย์กลาง $= \dfrac{v^2}{r}$

a_t = ความเร่งแนวสัมผัสขึ้นอยู่กับตำแหน่งที่วัตถุอยู่

3.3 การหาแรงที่ทำให้วัตถุวิ่งเป็นวงกลม กำหนดให้วัตถุมวล m ถูกกระทำด้วยแรง ΣF_c (ผลรวมของแรงสู้ศูนย์กลาง) ทำให้วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่และมีรัศมีเท่ากับ r



จากกฎของนิวตัน $\Sigma F = ma$

แต่ $a_c = \dfrac{v^2}{r}$

$\therefore \quad \Sigma F_c = \dfrac{mv^2}{r}$

3.4 อัตราเร็วของการเคลื่อนที่เป็นวงกลม การเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นวงกลม เราสามารถกำหนดอัตราได้หลายลักษณะด้วยกันดังต่อไปนี้

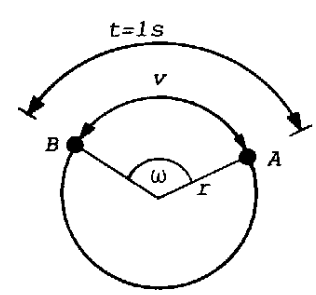
1. อัตราเร็วเชิงเส้น (V) คือ ความยาวตามส่วนโค้งของวงกลมที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในเวลา 1 วินาทีมีหน่วยเป็น เมตร/วินาที

2. อัตราเร็วเชิงมุม (ω) คือ มุมที่จุดศูนย์กลางมีหน่วยเป็นเรเดียนที่รองรับความยาว ส่วนโค้งของวงกลมที่เคลื่อนที่ในเวลา 1วินาที มีหน่วยเป็น เรเดียน/วินาที

3. อัตราเร็วเป็นรอบ (f) คือ จำนวนรอบของวัตถุที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมในเวลา 1วินาทีมีหน่วยเป็น รอบ /วินาที

4. อัตราเร็วเป็นคาบ (T) คือ เวลาที่วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมครบ 1 รอบมีหน่วยเป็น วินาที

3.5 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วเชิงมุมและเชิงเส้น กำหนดให้วัตถุมวล m เคลื่อนที่จาก A $\rightarrow$ B ในเวลา 1 วินาทีจะได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ v และที่จุดศูนย์กลางรองรับส่วนโค้งเท่ากับ ω รัศมีของวงกลมเท่ากับ r



จากความรู้ตรีโกณจะได้มุมที่จุดศูนย์กลางเป็นเรเดียน = $\frac{\text{ส่วนโค้ง}}{\text{รัศมี}}$

จากรูปแทนค่า $\omega = \frac{v}{r}$

จะได้ $v = \omega r$

ข้อสังเกต !ความสัมพันธ์ระหว่าง v,ω,f และ T เขียนได้ดังนี้

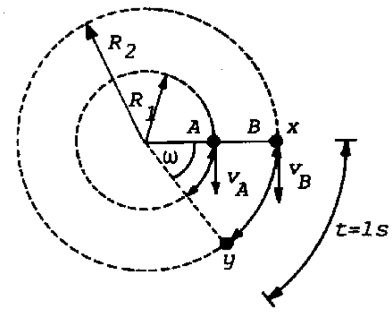
$v = 2\pi rf$ หรือ $v = \frac{2\pi r}{T}$

$\omega = \pi f$ หรือ $\omega = \frac{2\pi}{T}$

สรุปสูตวงกลม จะได้ $a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$

$$\sum F_C = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

3.6 อัตราเร็วของวัตถุผูกตามระยะต่าง ๆของเชือกแกว่งเป็นวงกลม กำหนดให้มวล A และ B ผูกที่ระยะ R_1 และ R_2 จากจุดหมุนตามลำดับแล้วแกว่งเป็นวงกลมบนพื้นระดับด้านอัตราเร็วเชิงมุม ω ดังรูป 14.12



รูปที่ 4.12 วัตถุที่ผูกในเชือกเส้นเดียวกันแล้วแกว่งเป็นวงกลม จะมีอัตราเร็วเชิงมุมเท่ากัน

จากรูปวัตถุเคลื่อนที่จาก X $\rightarrow$ Y .ในเวลา 1วินาที

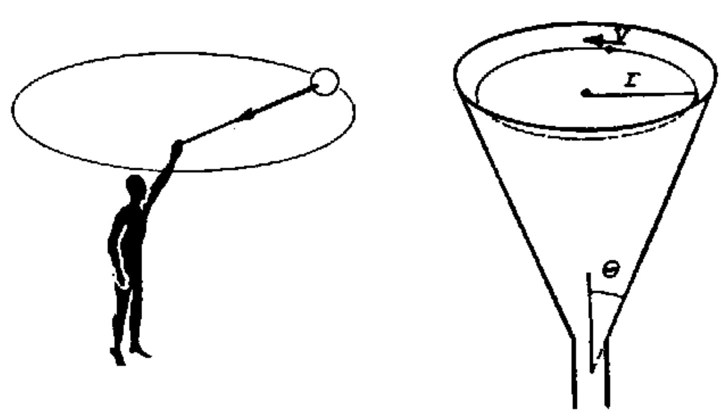
จะได้ $\omega_A = \omega_B = \omega$

และ $V_A = \omega R_1$, $V_B = \omega R_2$

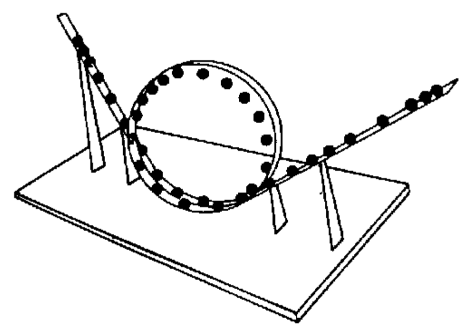
ดังนั้นจะได้ $V_B > V_A$

แสดงว่าอัตราเร็วเชิงมุมของวัตถุ ที่ผูกตามระยะต่างๆของเชือกจะได้ค่าเท่ากันแต่อัตราเร็วเชิงเส้นขึ้นกับรัศมี

3.7 การคำนวณการเคลื่อนที่เป็นวงกลม วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมทีเราพบเห็นมีอยู่หลายลักษณะด้วยกัน เช่น การแกว่งวัตถุเป็นวงกลมแนวราบในอากาศ. การเลี้ยวโค้งของรถยนต์การเคลื่อนวัตถุเป็นวงกลมในแนวดิ่ง เป็นต้น



a) การแกว่งวัตถุเป็นวงกลมแนวราบ b) วัตถุวิ่งเป็นวงกลมที่ข้างกรวย



c) วัตถุวิ่งเป็นวงกลมแนวดิ่ง

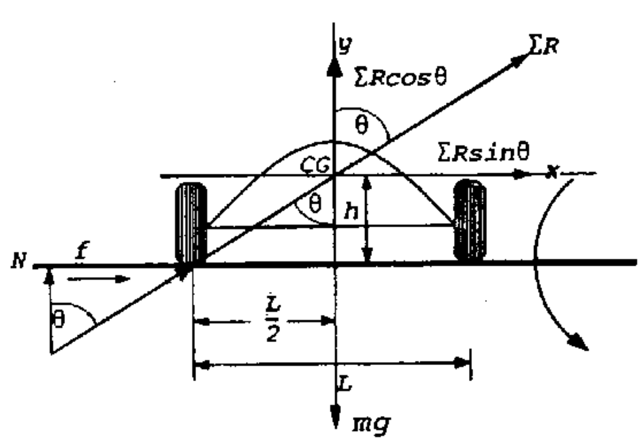
รูปที่ 14.13 แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นวงกลมลักษณะต่างๆ

เพื่อความสะดวกในการคำนวณโจทย์เกี่ยวกับวงกลม เราได้แยกการคำนวณโจทย์เป็น 2 พวกคือ

1. การเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นวงกลมแนวราบได้แก่ วงกลมดังรูป 14.13a และ b เป็นต้น
2. การเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นวงกลมแนวดิ่งได้แก่วงกลมดังรูป 14.13c

3.8 การเลี้ยวโค้งของรถยนต์และรถมอเตอร์ไซค์

3.8.1 การเลี้ยวโค้งของรถยนต์ เมื่อรถวิ่งเลี้ยวโค้งบนถนนราบ จะทำให้ล้อของรถยกขึ้นและล้อนอกจะกดพื้น อัตราเร็วของรถขึ้นอยู่กับสัมประสิทธิ์ความเสียดทานของถนนและลักษณะของรถ



จากรูป รถมวล m ระยะหางของลอ L และจุด CG. สูงจากพนเทากับ hวิ่งเลี้ยวโค้งบนถนนที่มีรัศมีความโค้ง R สัมประสิทธิ์ความเสียดทาน μ

เขียนแรงต่างๆ ที่เกิดขึ้นกับรถโดยรวมแรง N และ f ให้เท่ากับ $\sum R$

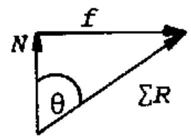
ตั้งแกน Xในแนวราบและแกน Y ในแนวดิ่ง

$\Sigma F_Y = 0$ จะได้ $\sum R\cos\theta = mg$ ....(1)

$\Sigma F_x = \frac{mv^2}{r}$ จะได้ $\Sigma R \sin\theta = \frac{mv^2}{r}$ ....(2)

(2) / (1) จะได้ $\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}$

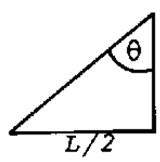
จากรูปค่า $\tan\theta$ ขึ้นอยู่กับแรงลักษณะรถซึ่งแยกพิจารณาได้ดังนี้



จาก Δ ของแรง

$$\tan\theta = \frac{f}{N} = \mu \qquad \therefore \mu = \tan = \frac{v^2}{Rg}$$

แสดงว่าอัตราเร็วของรถขึ้นอยู่กับค่า μ



จาก Δ ของรถ

$$\tan\theta = \frac{L}{2h} = \frac{V^2}{Rg}$$

$$V = \sqrt{\frac{LRg}{2h}}$$

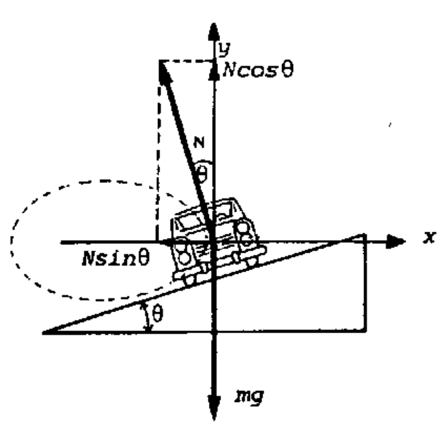
แสดงว่าอัตราเร็วของรถขึ้นอยู่กับ L และ h

สรุป

1. รถคันเดียวกันวิ่งบนทางโค้งด้วยอัตราเร็วของรถขึ้นอยู่กับสัมประสิทธ์ความเสียดทานของถนน ตามสมการ $V = \sqrt{\mu rg}$

2. บนถนนสายเดียวกันอัตราเร็วของรถขึ้นอยู่กับลักษณะของรถคือ L มาก, h น้อย, V จะมีค่าตามสมการ $V = \sqrt{\frac{Lrg}{2h}}$

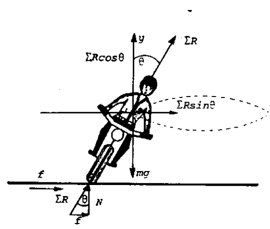
เนื่องจากล้อรถกับถนนนั้นมีค่า μ จำกัด ดังนั้นเราจึงไม่สามารถเพิ่มอัตราเร็วของรถให้มากขึ้นอีกได้ ด้วยสาเหตุนี้ถ้าเราต้องการให้รถเลี้ยวโค้งด้วยอัตราเร็วสูง เราจะต้องยกขอบนอกของถนนขึ้น จะทำให้แรงสู่ศูนย์กลางมากขึ้นดังรูป



ให้รถเลี้ยวโค้งบนถนนที่มีความเสียดทานน้อยมากเอียง ทำมุม μ กับแนวระดับด้วยอัตราเร็ว V ถนนมีรัศมีความโค้ง r ต้องการหาขนาดของมุม θ

เขียนแรงที่เกิดขึ้นกับรถแล้วแตกให้อยู่ในแนวราบและดิ่ง

$$\sum F_Y = 0 \quad \text{จะได้} \quad N\cos\theta = mg \qquad \text{........(1)}$$

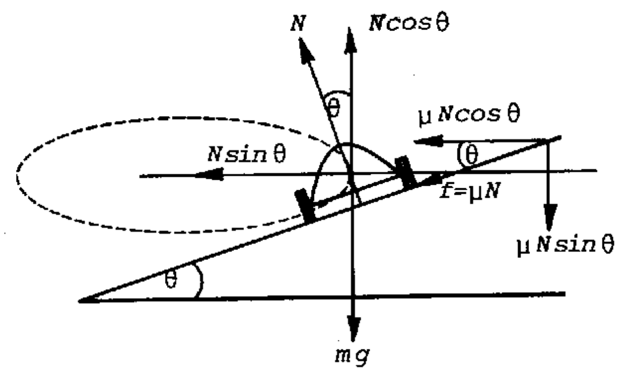


$$\Sigma F_x = \frac{mv^2}{r} \quad \text{จะได้} \quad N\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \qquad \ldots\ldots..(2)$$

$$(2)/(1) \qquad \tan\theta = \frac{V^2}{rg}$$

$\therefore$ มุมเอียงของถนน $\tan\theta = \dfrac{V^2}{rg}$

ถ้าถนนมีสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน μ จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้



เขียนแรงที่เกิดกับรถแล้วแตกแรงให้อยู่ในแกน X และ Y

จากรูป $\sum F_Y = 0$ จะได้ $n\cos\theta = mg + \mu N\sin\theta$

$$N(\cos\theta - \mu\sin) = mg \qquad \text{---------(1)}$$

$$\sum F_X = \frac{mv^2}{r} \quad \text{จะได้} \quad N\sin\theta + \mu N\cos\theta = \frac{mv^2}{r}$$

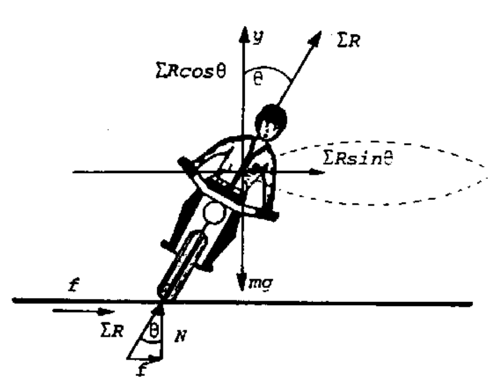
$$N(\sin\theta + \mu\cos\theta) = \frac{mv^2}{r} \qquad \text{---------(2)}$$

$$(2)/(1) \qquad \frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta} = \frac{v^2}{rg}$$

$\cos\theta$ หารทั้งเศษและส่วน $\dfrac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta} = \dfrac{v^2}{rg}$

$$V = \sqrt{rg\frac{(\tan\theta + \mu)}{1 - \mu\tan\theta}}$$

3. 8.2 การเลี้ยวโค้งของมอเตอร์ไซด์ เมื่อรถมอเตอร์ไซด์วิ่งเลี้ยวโค้งจะทำให้รถเอียงเข้าหาวงกลมดังรูป เขียนแรงที่เกิดขึ้นกับตัวคน แล้วแตกแรงให้อยู่ในแนวราบและดิ่ง



จาก $\sum F_Y = 0$ จะได้ $\sum R\cos\theta = mg$ ----------(1)

จาก $\sum F_X = \frac{mv^2}{r}$ จะได้ $\sum R\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$ ---------(2)

(2) / (1) จะได้ $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

แต่ $\mu = \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

นั่นคือ มุมเอียงของรถที่ทำกับแนวดิ่งขึ้นอยู่กับอัตราเร็วของรถและสัมประสิทธิ์ความเสียดทานของถนน

ตามเงื่อนไขดังนี้ $\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \le \mu$

ถ้า $\frac{v^2}{rg} \langle \mu$ ขณะนั้นรถเอียงทำมุม $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

ถ้า $\frac{v^2}{rg} = \mu$ ขณะนั้นรถเอียงทำมุม $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

ถ้า $\frac{v^2}{rg} \rangle \mu$ รถจะล้ม

ตัวอย่างที่ 1 รถยนต์คันหนึ่งกำลังวิ่งเลี้ยวโค้งบนถนนระดับ ซึ่งมีรัศมีความโค้งท่ากับ 5 เมตร ถ้าจุดศูนย์ถ่วงของรถยนต์อยู่สูงจากถนน 0.5 เมตร ปรากฏว่ารถยนต์วิ่งด้วยอัตราเร็วสูงสุดที่จะไม่พลิกคว่ำเท่ากับ 10 เมตร / วินาที อยากทราบว่ารถคันนี้จะมีระยะห่างระหว่างล้อทั้งสองเป็นเท่าใด

วิธีทำ จาก $v = \sqrt{\frac{LRg}{2h}}$ จากโจทย์ R = 5 m , V = 10 m / s, g = 10 m / s

แทนค่า $10 = \sqrt{\frac{L \times 5 \times 1}{2 \times 0.5}}$; $10 = \sqrt{50L}$

$100 = 50L;\ L = 2$ m

$\therefore$ ระยะห่างระหว่างล้อทั้งสอง 2 เมตร ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 รถยนต์คันหนึ่งเคลื่อนที่ไปบนถนนระดับราบวงกลมรัศมี 100 m วิ่งได้เร็วที่สุด 20 m /s จงหา ส.ป.ส. ของความเสียดทานระหว่างพื้นถนนกับล้อรถยนต์

วิธีทำ อัตราเร็วสูงสุดตอนเลี้ยวโค้ง $v = \sqrt{\mu rg}$

จากโจทย์ $r = 100, V = 20, \mu = ?$

แทนค่า $20 = \sqrt{\mu x100x10};$ $400 = 1000\mu$

$\mu = 0.4$ ตอบ
