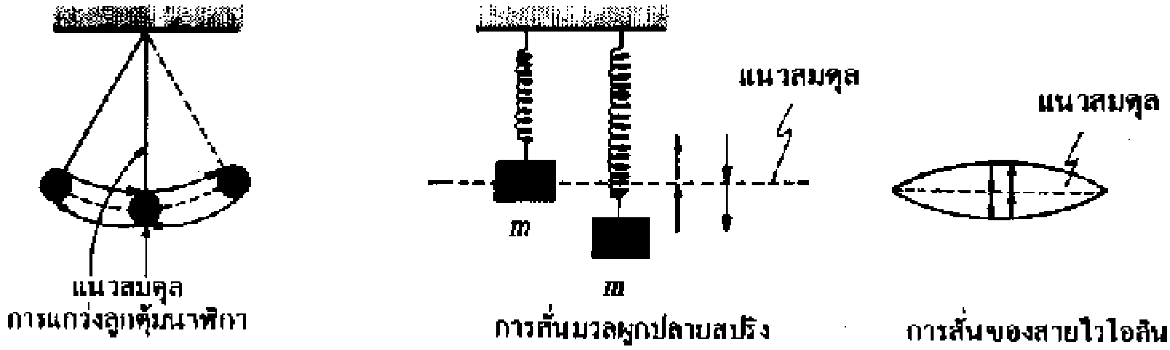
4. การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก

4.1 ลักษณะการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิค คือ การเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบกลับไปกลับมาผ่านแนวสมดุลของระบบ ดังปรากฏในรูปที่ 14.17 ได้แก่ การแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกา การแกว่งของมวลผูกปลายสปริงและการสั่นของสายไวโอลิน เป็นต้น

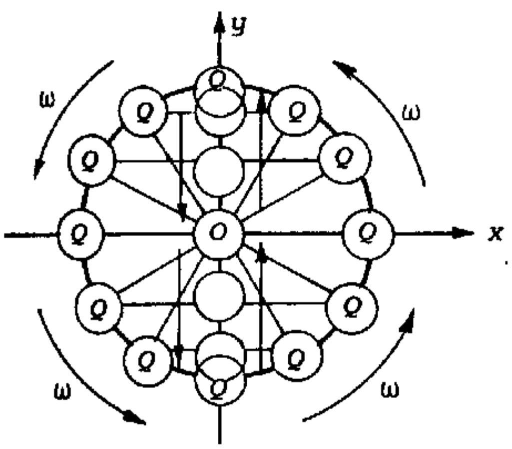


รูปที่ 14.17 ลักษณะการสั่นของระบบต่าง ๆ

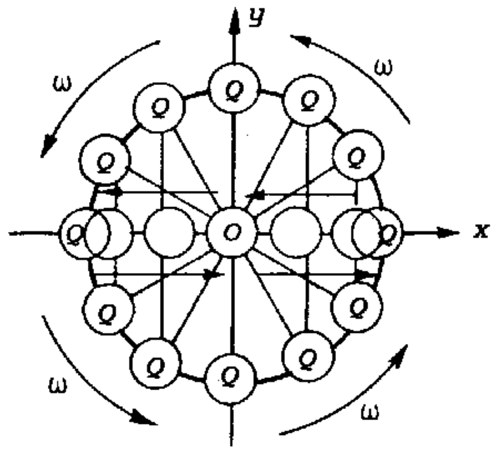
การเคลื่อนที่ของระบบต่างๆ ในรูปที่ 14.17 ทำให้เราสรุปได้ว่า วัตถุจะเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิคได้เมื่อวัตถุนั้นเคลื่อนที่จากแนวสมดุลทำให้เดแรงย้อนกลับสะสมอยู่ เมื่อปล่อยให้เคลื่อนที่ไปกลับมันจะเกิดการเคลื่อนที่ไปกลลับรอบแนวสมดุลนั้นดังรูปที่ 14.17

พิจารณาการเคลื่อนที่ของเงาของอนุภาคที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่

กำหนดให้อนุภาค Q เคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยรัศมี A และอัตราเร็วเชิงมุม ω และเมื่อเวลา $t = 0$ อนุภาคเคลื่อนที่ผ่านแกน +X พอดี ขณะที่อนุภาค Q เคลื่อนที่เป็นวงกลม สมมติให้ Q_X และ Q_Y เป็นเงาของ Q บนแกน X และแกน Y ตามลำดับ เมื่อเวลาผ่านไป t เส้นตรง OQ จะทำมุม ωt กับกน +X และเงา Q_X กับ Q_Y จะมีการขจัดเทียบกับจุด O เป็น X และ Y ตามลำดับ



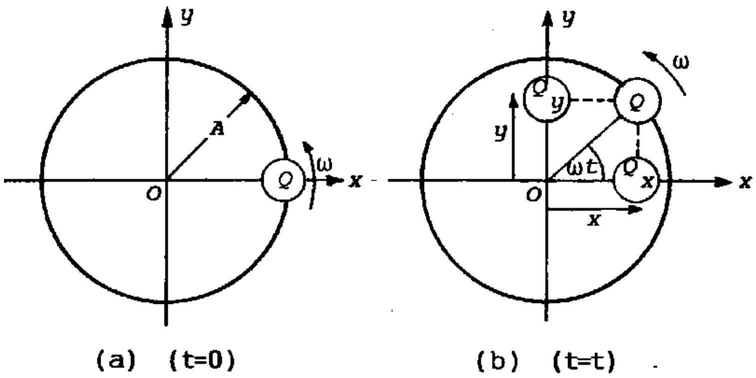
รูปที่ 14.18 เงาของอนุภาค Q บนแกน Y
(เคลื่อนที่แบบ SHM โดยมีแกน
X เป็นแนวสมดุล



รูปที่ 14.19 เงาของอนุภาค Q บนแกน X
(เคลื่อนที่แบบ SHM โดยมีแกน
Y เป็นแนวสมดุล)

4.2 สมการการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิค

กำหนดให้อนุภาค Q เคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยรัศมี A ด้วยอัตราเร็วคงที่ ω เริ่มแรก อนุภาค Q อยู่บนแกน X เมื่อเคลื่อนที่ได้ t วินาที มุมที่จุดศูนย์กลางเป็น ω t ดังรูป



รูปที่ 14.20 การเคลื่อนที่ของอนุภาค Q เป็นวงกลม

4.2.1 การขจัดของอนุภาค Q ที่เคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิค

พิจารณาเงาของอนุภาค Q บนแกน X จะได้การขจัดมีค่าเท่ากับ A (X = A เมื่อ t = 0) จาก Δ QOQ_X ในรูป b จะได้การขจัดบนแกน X ณ เวลาใดๆ ดังนี้ $\frac{X}{A} = \cos\omega t$

$$X = A \cos \omega t$$

พิจารณาเงาของอนุภาค Q บนแกน Y จะได้การขจัดเริ่มแรกมีค่าเท่ากับศูนย์(Y = 0 t = 0)จาก Δ QOQ_X ในรูป b จะได้การขจัดบนแกน Y ณ เวลาใดๆ ดังนี้ $\frac{Y}{A}\sin\omega t$

$$Y = A \sin \omega t$$

โดย X และ Y = การขจัดของอนุภาค Q บนแกน X และ Y ตามลำดับ โดยวัดจากจุด origin

A = ช่วงกว้าง คือ การขจัดมากที่สุดของการเคลื่อนที่ และ ω t = มุมเฟส

4.2.2 ความเร็วของการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิค

ถ้าเริ่มแรกอนุภาค Q มีการขจัดและมุมเฟสเป็นศูนย์ จะได้การขจัดของอนุภาคอยู่ในแกน Y

$\therefore$ จากสมการการขจัด $Y = A\sin\omega t$ ----- (1)

แต่ $V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$

หา v จาก 1 จะได้ $V = \frac{dy}{dt} = A\frac{d\sin\omega t}{dt}$

$$V = (A\cos\omega t)\frac{d\omega t}{dt}$$

$$V = \omega A\cos\omega t \quad \text{--------(2)}$$

$$\frac{V}{\omega} = \text{Acooos}\,\omega t \qquad \text{--------(3)}$$

สมการ 3 ยกกำลัง 2 จะได้ $$\frac{V^2}{\omega} = A^2\cos^2\omega t \qquad \text{-------(4)}$$

สมการ 1 ยกกำลัง 2 จะได้ $$Y^2 = A^2\sin^2\omega t \qquad \text{-------(5)}$$

สมการ 4 +สมการ 5 จะได้ $$\frac{v^2}{\omega^2} + Y^2 = A^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)$$

$$\frac{V^2}{\omega^2} + Y^2 = A^2$$

$$V^2 = \omega^2(A^2 - Y^2)$$

$$V = \ +\omega\sqrt{A^2 - Y^2} \qquad \text{--------(6)}$$

เครื่องหมาย + เป็นตัวแสดงทิศทางของความเร็ว โดย V เป็นบวก (+) แสดงว่ามีทิศตาม Y และ V เป็นลบ (-) แสดงว่ามีทิศตรงข้ามกับ Y

นั่นคือ ณ การขจัด Y หนึ่งค่าจะมีความเร็วได้ 2 ค่า คือ มีที่เดียวกับ Y และตรงขามกับ Y

หมายเหตุ กรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ SHM โดยการขจัดไม่ได้อยู่ในแกน X หรือแกน Y จะได้ Y เป็นการขจัดในแกนใดๆก็ได้

4.2.3 ความเร่งของการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิค

จากสมการอัตราเร็ว $$V = \omega\,\text{Acos}\,\omega t \qquad \text{-------(2)}$$

แต่ $$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

∴ หา a จากสมการ 2 จะได้ $$a = \frac{dv}{dt} = \omega A\frac{d\cos\omega t}{dt}$$

$$a = -\omega^2 A\sin\omega t \qquad \text{--------(8)}$$

แต่ $y = \text{Asin}\,\omega t$

∴ จาก 8 เขียนใหม่ได้ $$a = -\omega^2 y \qquad \text{--------(9)}$$

โดย Y เป็นการขจัดในแนวใดๆก็ได้

เครื่องหมายลบ (-) แสดงว่าความเร่งมีทิศทางตรงข้ามกับการขจัด Y

นั่นคือ ความเร่งของการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิคจะต้องมีทิศสู่แนวสมดุลเสมอ

4.2.4 สรุปสมการการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิค

1.สมการการขจัดจะได้ $Y = \text{Asin}\,\omega t$ เมื่อการขจัดเริ่มแรกเป็นศูนย์

หรือ $X = \text{Acos}\,\omega t$ เมื่อการขจัดเริ่มแรกเท่ากับ A

2. สมการอัตราเร็ว $V = \omega\,\text{Acos}\,\omega t$ เมื่อการขจัดเริ่มแรกเป็นศูนย์

.หรือ $V = \pm\ \omega\sqrt{A^2 - S^2}$ S เป็นการขจัดในแนวใดๆ

3.สมการอัตราเร่ง a = เมื่อการขจัดเริ่มแรกเป็นศูนย์

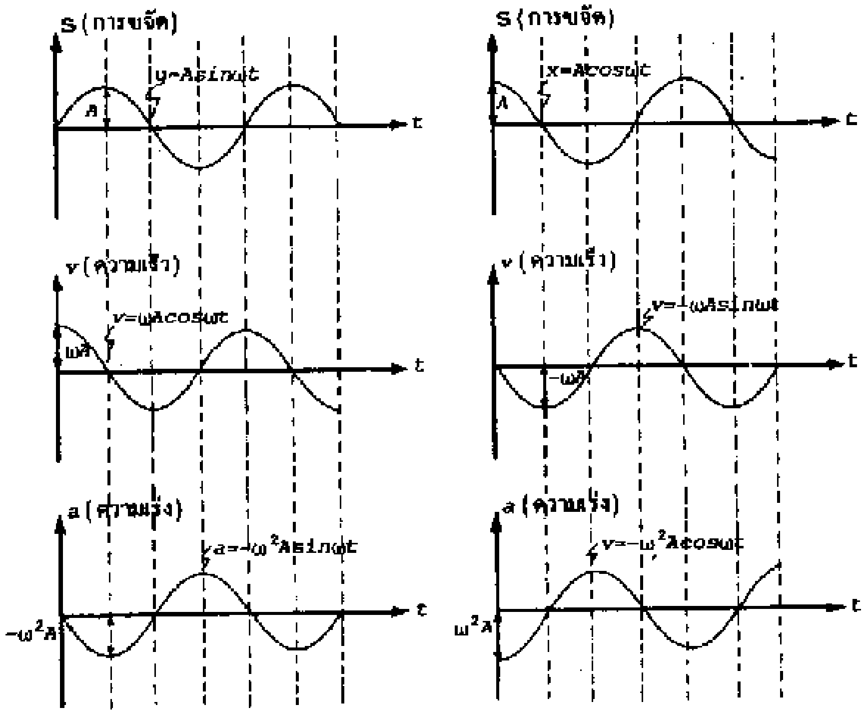
หรือ $a = -\ \omega S$ S เป็นการขจัดในแนวใดๆ

กราฟความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิค

ถ้าสมการการขจัดเป็น $S = A\sin\omega t$ ถ้าสมการการขจัดเป็น $S = A\cos\omega t$

สมการอัตราเร็ว $V = \omega A\cos\omega t$ สมการอัตราเร็ว $V = -\omega A\sin\omega t$

สมการอัตราเร่ง $a = -\omega^2 A\sin\omega t$ สมการอัตราเร่ง $a = -\omega^2 A\cos\omega t$



ข้อสังเกตจากกราฟ

กราฟความสัมพันธ์ s-t , v-t และ a-t ของการเคลื่อนที่ของอนุภาคต่างๆ สรุปได้ดังนี้

1. ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงจะได้กราฟความสัมพันธ์เป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้ง การ การพิจารณาลักษณะกราฟต่างๆ ให้ดูที่ slope หรือค่าของความเร็ว , ความเร่ง

2. ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่แบบ SHMจะได้กราฟความสัมพันธ์เป็น sine หรือcosine curve ดังรูปที่ 14.21 การพิจารณาลักษณะกราฟให้ใช้วิธีการหาค่าอนุพันธ์

4.3 แรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิค

เนื่องจากการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิคเป็นการเคลื่อนที่ชนิดมีความเร่ง แสดงว่าจะต้องมีแรงกระทำต่อวัตถุและการเคลื่อนที่จะต้องเป็นไปตามกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

4.3.1 การหาเงื่อนไขของแรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่แบบ SHM

จาก $\sum F = ma$

แต่ความเร่งของ SHM จะได้ $a = -\omega^2 S$

$\therefore$ แทนค่า จะได้ $F = -m\omega^2 S$ ---------(18)

จากสมการ $m\omega^2 =$ ค่าคงที่ $= k$

สมการ 18 ขียนใหม่ได้ $F = -ks$ โดย $k = m\omega^2$ ---------(19)

* นั่นคือ วัตถุจะเคลื่อนที่แบบ SHM ได้ต่อเมื่อ

1. แรงลัพธ์เกิดกับวัตถุต้องมีทิศเข้าสู่แนวดุล
2. ขนาดของแรงลัพธ์แปรผันตามการขจัด $\sum F \alpha\, S$

4.3.2 คาบและความถี่ของการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิค

จาก $k = m\omega^2$

เราทราบว่าอัตราเร็วเชิงมุมของการเคลื่อนที่เป็นวงกลมสัมพันธ์กับคาบ ด้วยสมการ

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

เนื่องจากเราสังเกตเห็นว่าการเคลื่อนที่ของเงาแบบ SHM มีคาบของการเคลื่อนที่ครบรอบเท่ากันคาบของการเคลื่อนที่เป็นวงกลมที่เกิดเงานั้น ดังนั้น T จึงเป็นคาบของ SHM ด้วย

ดังนั้น $K = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

คาบของ SHM $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ --------(20)

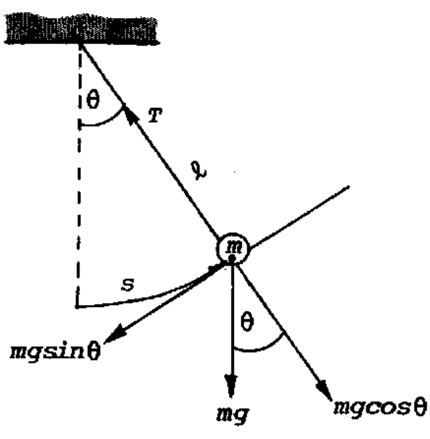
ความถี่ของ SHM $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ ---------(21)

4.4 การเคลื่อนที่แบบ SHM ของระบบต่าง ๆ

ในการที่เราจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของระบบเพียง 2 ระบบเท่านั้นคือ การแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกาและการสั่นของมวลปลายสปริง

4.4.1 การเคลื่อนที่แบบ SHM ของลูกตุ้มนาฬิกา

กำหนดให้ลูกตุ้มมวล mผูกเชือกยาว ℓ เมื่อลูกตุ้มอยู่ในตำแหน่งที่เชือกทำมุม θ กับแนวดิ่งมีอัตราเร็วเท่ากับ v และส่วนโค้งรองรับมุม θ เท่ากับ s



รูปที่ 14.26 การแกว่งของลูกตุ้ม

พิจารณาแรงที่มวล m ดังรูปจะได้

$$\sum F_{\text{รัศมี}} = \frac{mv^2}{r}$$

แทนค่า

$$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{r}$$

$$T = mg\cos\theta = \frac{mv^2}{\ell} \qquad \text{----------*}$$

ความตึงเชือก ณ ตำแหน่งใดๆ จะได้ $T = mg\cos\theta = \dfrac{mv^2}{\ell}$

พิจารณาในแนวเส้นสัมผัส

จากรูปจะได้ $F = -mg\sin\theta$ [Fตรงข้ามกับSเป็นลบ] ----------(22)

จากสมการแสดงว่า $F \alpha \sin\theta$ จึงไม่ได้แกว่งแบบSHM

ถ้ากำหนดให้มุม θ เล็กมากๆจะได้ $\sin\theta \approx \dfrac{S}{\ell}$

สมการ 22 เขียนใหม่ได้ $F = -mg\sin\theta = \dfrac{-mgs}{\ell}$ ---------(23)

แต่ $\dfrac{mg}{\ell}$ = ค่าคงที่ (k)

สมการ 23 เขียนใหม่ได้ $F = -ks$

แสดงว่าแรงที่เกิดขึ้นกับวัตถุมีทิศสู่แนวสมดุลและแปรผันตามแนวขจัด จึงเป็นการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิค

หาคาบเวลาของการเคลื่อนที่

จาก $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ --------(24)

แต่ $k = \dfrac{mg}{\ell}$

แทนค่า k ใน 24จะได้ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\frac{g}{\ell}}}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad \text{-------(25)}$$

เมื่อ g = ความเร่งที่เกิดขึ้นกับวัตถุ

ในกรณีที่ลูกตุ้มแขวนอยู่ในระบบที่กำลังเคลื่อนที่แบบมีความเร่ง a และแกว่งเป็นมุมน้อยๆรอบจุดสมดุล เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มนั้นยังคงประมาณได้ว่าเป็นแบบ SHM และเราสามารถหาคาบ T ได้จากสมการ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{|\vec{g} - \vec{a}|}} \qquad \text{---------- 26}$$

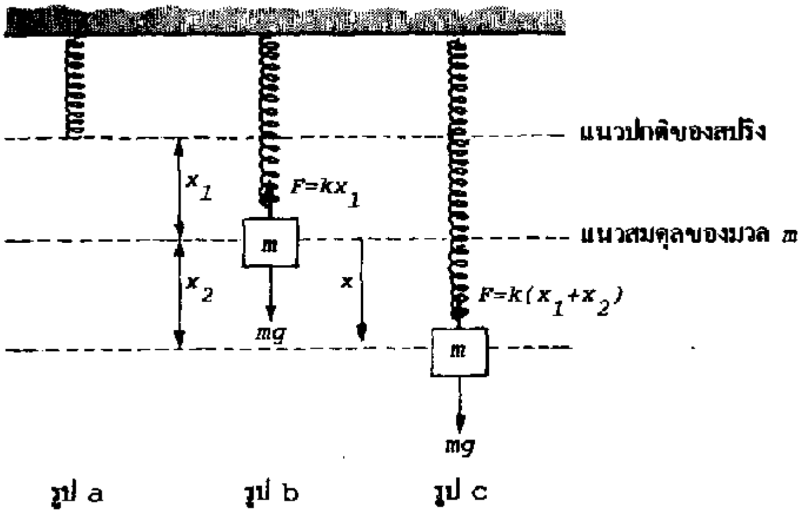
โดยที่ $\vec{g}$ = เป็นความเร่งที่เกิดจากความโน้มถ่วง

$\vec{a}$ = เป็นความเร่งของระบบที่ลูกตุ้มแขวนอยู่

$|\vec{g}-\vec{a}|$ = คือขนาดของเวคเตอร์ $g-a$ ซึ่งเป็นความเร่งลัพธ์ของลูกตุ้มเมื่อเทียบกับผู้สังเกตที่อยู่ในระบบนั้น

4.4.2 การแกว่งของมวลผูกปลายสปริง

กำหนดให้มวล m แขวนสปริงในแนวดิ่งดังรูป (a) แล้วค่อยๆ ปล่อยให้สปริงยืดออกจนกระทั่งมวล m อยู่นิ่ง ดังรูป (b) จากนั้นดึงมวล m ให้ยืดออกจากรูป(b) เท่ากับ X_2 แล้วปล่อยให้มันสั่นขึ้นลงแบบ SHM



รูปที่ 14.27 การแกว่งมวลผูกสปริง

พิจารณารูป (b) มวล m อยู่ในภาวะ

จะได้ $kx_1 = mg$

พิจารณารูป (c) จะได้ $\sum F = -k(x_1+x_2)+mg$ (แรงมีทิศตรงข้ามกับ x เป็น-1)

$\sum F = -k\,x_1 - k\,x_2 + mg$

แทนค่า mg จะได้ $\sum F = -k\,x_1 - k\,x_2 + k\,x_1$

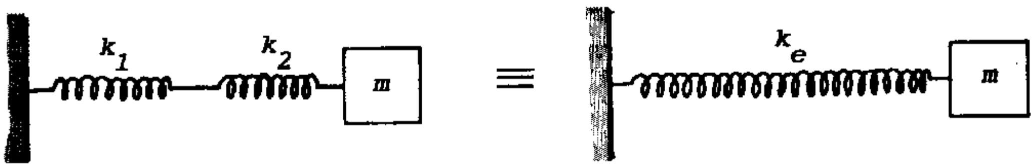
$\sum F = -k\,x$

นั่นคือ F มีทิศสู่แนวสมดุลและมีค่าแปรผันตามการขจัดX_5ดังนั้นการแกว่งของการผูกปลายสปริงจึงเป็นการแกว่งแบบ SHM คาบเวลาการแก่วงของมวลผูกปลายสปริงมีค่าดังสมการ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ โดย k = ค่านิจของสปริง --------- (28)

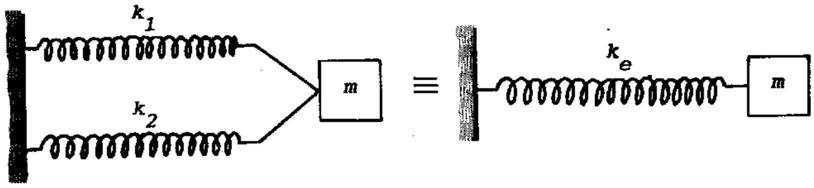
เนื่องจากการหาคาบเวลาการสั่นของมวลจากผูกสปริงจากสูตรข้างบน จะต้องเป็นสปริงเส้นเดี่ยวเท่านั้น ดังนั้นถ้ามีสปริงหลายเส้นจะต้องทำการยุบให้เป็นสปริงเส้นเดียวเสียก่อน จึงมีสูตรการยุบค่านิจของสปริงที่มีการต่อในแบบต่างๆได้ดังนี้

1. การต่อสปริงแบบอนุกรม เมื่อนำสปริงมาต่อตามกันแล้วต่อกับมวล เราสามารถยุบสปริงให้เป็นเส้นเดียวแล้วหาค่านิจใหม่จะได้ตามสมการ



$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

2.การต่อสปริงแบบขนาน เมื่อนำสปริงมาต่อขนานกันและต่อกับมวล เราสามารถยุบสปริงให้เป็นเส้นเดียวเละหาค่านิจได้จากสมการ



$$K_e = k_1 + k_2$$

4.5 สรุปสูตรการคำนวณ SHM

1. สมการการขจัด $S = A\sin(\phi_0 + \omega t)$
2. สมการความเร็ว $V = \omega A\cos(\phi_0 + \omega t)$ หรือ $V = \pm\omega\sqrt{A^2 - S^2}$
3. สมการความเร่ง $a = -\omega^2 A\sin(\phi_0 + \omega t)$ หรือ $a = -w^2 s$
4. เงื่อนไขการเคลื่อนที่แบบ SHMจะได้ $\sum\vec{F} = -k\vec{S}$
5. ความถี่มาตรฐานของการเคลื่อนที่แบบ SHM

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{หรือ} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

6. ความถี่ของการแกว่งลูกตุ้มนาฬิกา คาบของ SHM

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \text{หรือ} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

กรณีระบบมีความเร่ง $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{|\vec{g} - \vec{a}|}}$ หรือ $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{|\vec{g} - \vec{a}|}{\ell}}$

7. ความถี่ของการสั่นผูกปลายสปริง $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ หรือ $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

4.6 ตัวอย่างการคำนวณการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิค

ตัวอย่างที่ 1 อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ซิมเปิลฮาร์โมนิคบนพื้นระดับที่มีแอมพลิจูด 10 ซม ที่จุดซึ่งห่างจาก จุดสมดุล 6 ซม4มีความเร็ว24 ซม/วินาที จงหาคาบเวลา

วิธีทำ หา ω จาก $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - S^2}$

จากโจทย์ $A = 10x10^{-2}$ m , $S = 6x10^{-2}$m , $V = 24x10^{-2}$m/s

แทนค่า $24x10^{-2} = \omega\sqrt{(10x1\theta^{-2})^2 - (6x10^{-2})^2}$

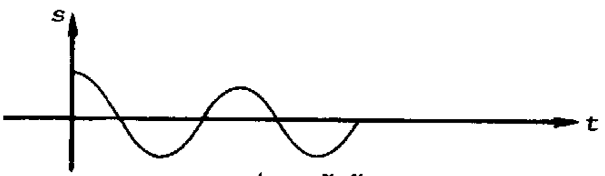
$\omega = 3$

แต่ $\omega = \frac{2\pi}{T} \therefore T = \frac{2\pi}{3} = \frac{44}{21}$

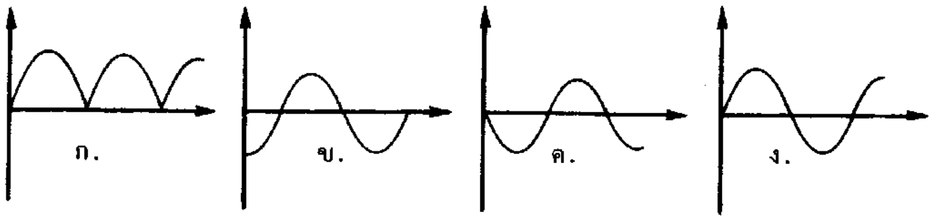
คาบเวลาการเคลื่อนที่ = 2.1 วินาที/รอบ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 ข้อมูลต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 1 ถึงข้อ 3

อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ได้กราฟการขจัดกับเวลา ดังกราฟ



กราฟการขจัดกับเวลา



1. กราฟระหว่างความเร็วกับเวลาของอนุภาคนี้คือ

   ก. ข. ค. ง.

2. กราฟระหว่างความเร่งกับเวลาของอนุภาคนี้คือ

   ก. ข. ค. ง.

3. กราฟระหว่างพลังงานจลน์กับเวลาของอนุภาคคือ

   ก. ข. ค. ง.

วิธีทำ โจทย์กำหนดกราฟการขจัดกับเวลามาให้เป็นกราฟรูป cosin curve

1.หาลักษณะกราฟระหว่าง v กับ t จาก $V = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}$(cosin curve) = -sine curve

กราฟ v กับ t เป็น -sine curve ตอบข้อ ค.

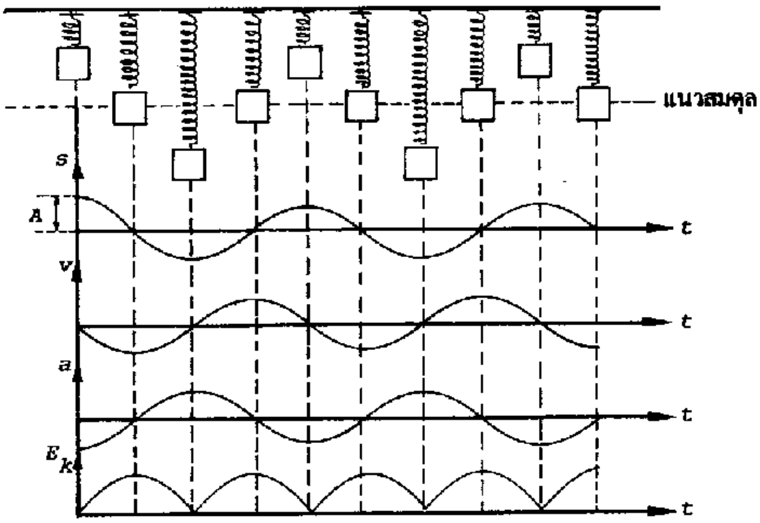
2. หาลักษณะกราฟระหว่าง a กับ t จาก $V = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}$(-sine curve) =- cosin curve

กราฟ a กับ t เป็น cosin curve ตอบข้อ ข.

3. หาพลังงานจลน์ของอนุภาคจาก $E_K=\frac{1}{2}mv^2$

แต่ v มีค่าแปรเปลี่ยนไปตามกราฟ sine curve เมื่อยกกำลังสองจะทำให้ค่าของ v^2 เป็นบวกเพียงอย่างเดียวแต่รูปยังคงเป็นกราฟรูป sine curve อยู่ ตอบข้อ ก.

กราฟความสัมพันธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์



ตัวอย่างที่ 3 มวลใดๆ กำลังเคลื่อนที่แบบ ด้วยแอมพลิจูดและมีความถี่เชิงมุม จงหาว่า

ก. ความเร็วมากที่สุดและน้อยที่สุดมีใด และเกิดขึ้นที่ตำแหน่งใดขนาดเท่า

ข. ความเร่งมากที่สุดและน้อยที่สุดมีใด และเกิดขึ้นที่ตำแหน่งใดขนาดเท่า

วิธีทำ **ก. พิจารณาสมการ** $v=\pm\omega\sqrt{A^2-S^2}$

ความเร็ว v จะมากที่สุด เมื่อ A^2-S^2 มีค่ามากที่สุด แสดงว่า S=0

$$V_{max} = \pm\omega\sqrt{A^2-0} = \pm\omega A$$

นั่นคือ ความเร็วมีขนาดมากที่สุด ωA ณ ตำแหน่งสมดุล(การขจัด S=0) และอาจมีทิศ + หรือทิศ – ก็ได้ ตอบ

ความเร็ว V จะน้อยที่สุด เมื่อA^2-S^2 มีค่าน้อยที่สุด แสดงว่า S=A หรือS=-A

$$V_{min}=\pm\omega\sqrt{A^2-A^2} = 0$$

นั่นคือ ความเร็วมีขนาดน้อยที่สุดเท่ากับ 0 ณ ตำแหน่งปลายสุดของการสั่น ($S=\pm A$) ตอบ

ข.พิจารณาสมการ $a = -w^2 s$

. ความเร่ง a จะมากที่สุด เมื่อ S มีค่ามากที่สุด นั่นคือ $S = \pm A$

$$a_{max} = \pm \omega^2 A$$

นั่นคือ ความเร่งมีขนาดมากที่สุด $\omega^2 A$ ณ ตำแหน่งปลายสุดของการสั่น $(s = \pm A)$ และอาจมีทิศ + หรือทิศ – ก็ได้

ความเร่ง a จะน้อยที่สุด เมื่อSมีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ S=0 ตอบ

$$a_{min} = -w^2(0) = 0$$

นั่นคือ ความเร็วมีขนาดน้อยที่สุดเท่ากับ 0 ณ ตำแหน่งสมดุล(S=0) ตอบ

ตัวอย่างที่ 4 วัตถุมวล 0.1 กิโลกรัม เคลื่อนที่แบบ SHM โดยมีแอมพลิจูด 1 เมตร และคาบ 0.2 วินาที

ก. จงหาค่าสูงสุดของแรงที่กระทำต่อมวลก้อนนี้

ข. จงหาค่าคงที่ของแรง(k)

ค. ถ้าเริ่มจับเวลาเมื่อวัตถุกำลังอยู่ที่จุดปลายสุดของการสั่นพอดี จงหาการขจัด ความเร็ว และความเร่ง เมื่อเวลาผ่านไป t วินาที

ง. จากข้อ(ค) จงหาเฟสเริ่มต้น ϕ_0 ของวัตถุ เมื่อเริ่มจับเวลา

จ. จากข้อ(ค) จงหาความต่างเฟสและเปรียบเทียบสภาวะการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อเวลา t_1=0.725 วินาที t_2=1.525 วินาที และ t_3=1.825 วินาที

วิธทำ จากโจทย์ m =0.1 kg A = 1 m T=0.2 วินาที

ก. แรงมีค่าสูงสุดเมื่อความเร่งมีค่าสูงสุด

จาก $a_{max} = -\omega^2 A = (\frac{2\pi}{T})^2 A$

$$a_{max} = (\frac{2\pi}{0.2})^2 (1) = 986.96 \text{ m/s}^2$$

จาก F =ma จะได้ $F_{max} = ma_{max}$ = 0.1x986.96N

$$F_{max} = 98.7 \text{ N}$$ ตอบ

ข. จาก F = -ks และ $a = -w^2 s$

ค่าคงที่ของแรง k หาได้จาก $k = mw^2$

แต่ $w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi$ เรเดียน/วินาที

แทนค่าจะได้ $k = 0.1 \times (10\pi)^2 = 98.7$ N/m ตอบ

ค. เมื่อ t = 0วัตถุมีการขจัดสูงสุดคือ $S = \pm A$ ดังนั้นเราทราบได้ทันทีว่ารูปแบบของสมการการขจัด ความเร็วและความเร่งจะเป็นดังนี้

$S = A\cos wt$

$V = -wA\sin wt$

$A = -w^2 A\cos wt$

แทนค่า A =1m และ $\omega = 10\pi$ เรเดียน / วินาที จะได้

$S = \cos 10 \omega t$ --------(1)

$V = -10\pi \sin 10\pi t$ --------(2)

$A = -100\pi^2 \cos 10\omega t$ --------(3) ตอบ

ง. เนื่องจากการกำหนดเฟสของ SHM ในที่นี้เราใช้การเคลื่อนที่ของเงาบนแกน Y ของอนุภาคที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมเป็นหลักในการกำหนด ทำให้เราได้สมการมาตรฐานของการขจัดเป็น $S = A\sin\phi$ โดยที่ $\phi = \phi_0 + \omega t$

ดังนั้นเพื่อหาเฟสเริ่มต้นเราควรเปลี่ยนสมการ ∂เป็นรูปของฟังก์ชั่น sin

จาก ∂ $S = \cos 10\omega t$ และ $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

$\therefore$ $S = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 10\pi t\right)$- ----------(4)

เทียบกับสมการ $S = \sin(\phi_0 + \pi\ \omega t)$

จะได้เฟสเริ่มต้น $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ เรเดียน ตอบ

จ. เมื่อเวลา t_1= 0.725 วินาที

เฟส $\phi_1 = \phi_0 + \omega t)$

$\phi = \frac{\pi}{2} + 10\pi\ (_1 0.725)$

$\phi_1 = \frac{31}{4}\pi$ เรดียน

จาก(1) การขจัด $S = \cos 10\pi t$

$= \cos 10\pi\ (0.725) = -0.71\text{m}$

จาก(2) ความเร็ว $V = -10\pi \sin 10\pi t$

$= -10\pi \sin 10\pi\ (0.725) = 22.2\text{m/s}$

จาก(3)ความเร่ง $a = -100\pi^2 \cos 10\pi t$

$= -100\pi^2 \cos 10\pi\ (0.725) = 698\text{m/s}^2$

*เครื่องหมาย ± หน้าตัวเลข จะบอกทิศของเวคเตอร์การขจัด ความเร็ว และความเร่ง

เมื่อเวลา t_2=1.525 วินาที

เฟส $\phi_2 = \phi_0 + \ \omega t$

$\phi_2 = \frac{\pi}{2} + 10\pi\ (1.525)$

$$\phi_2 = \frac{63}{4}\pi \text{ เรเดียน}$$

เมื่อเวลา t_3 =1.825 วินาที

เฟส $\phi_3 = \phi_0+\omega t_3$

$$\phi_3 = \frac{\pi}{2}+10\pi\,(1.825)$$

$$\phi_3 = \frac{75}{4}\pi \text{ เรเดียน}$$

$$\phi_2-\phi_1 = \frac{63}{4}\pi-\frac{31}{4}\pi = 8\pi \text{ เรเดียน}$$ ตอบ

ความต่างเฟส $$\phi_3-\phi_1 = \frac{75}{4}\pi-\frac{31}{4}\pi = 11\pi \text{ เรเดียน}$$ ตอบ

$$\phi_3-\phi_2 = \frac{75}{4}\pi-\frac{63}{4}\pi = 3\pi \text{ เรเดียน}$$ ตอบ

ที่เวลา t_1 กับ t_2 เฟสต่างกันเป็นจำนวนคู่ของ π (คืออยู่ในรูป$2n\pi$) ดังนั้นเวลา t_1 กับ t_2 วัตถุจะมีเฟสตรงกันและจะมีสภาวะการเคลื่อนที่เหมือนกันทุกประการคือ

การขจัด S = -0. 71m ตอบ

ที่เวลา t_1และ t_2 ความเร็ว V = 22.2m/s ตอบ

ความเร่ง a = 698m/s^2 ตอบ

เฟสที่เวลา t_3 จะต่างเฟสที่เวลา t_1 และ t_2 เป็นจำนวนคี่ของ π คืออยู่ในรูป $(2n+1)\pi$ ดังนั้นที่เวลา t_3 วัตถุจะมีเฟสตรงข้ามกับเวลา t_1 และ t_2 นั่นคือมีขนาดของ s,v และ a เท่ากัน แต่ทิศตรงข้ามกันทั้งหมด ดังนั้นเราสรุปได้ทันทีว่า

การขจัด S = 0. 71m ตอบ

ที่เวลา t_3 ความเร็ว V = -22.2m/s ตอบ

ความเร่ง a = -698m/s^2 ตอบ

เราสามารถตรวจคำตอบโดยการแทนค่า t_2 และ t_3ในสมการ (1),(2),และ(3)

****